Tema 1. **Coloquio de Física II.** **26/2/2015**

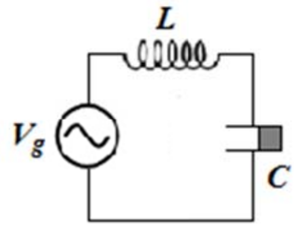
Nombre y Apellido: **Padrón:** **A B 82.02**

Correo electrónico: **Turno:** **Profesor:**

1) Un conductor muy largo yace sobre el eje *x* de una terna *xyz* estándar. El mismo transporta una corriente de 10 A en la dirección positiva de *x*. A) Cómo debe ubicarse otro conductor muy largo, por el que circula una corriente de 10 A, para que el campo $\vec{B}$ en el punto $\vec{P} = 0\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 1\hat{k}$ valga: $\vec{B} = \left(-3\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right)\mu\text{T}$. B) Una partícula de carga 1μC pasa por el punto P con velocidad $\vec{v} = 1000$ m/s $\hat{\jmath}$; qué campo eléctrico debe existir para que la fuerza neta sobre la partícula se nula? ($\mu_0=4\pi x10^{-7}$ T/Am)

2) Dos espiras circulares concéntricas de radios R_1=20 cm y R_2= 2 mm yacen en el plano *xy* con sus centros en el origen de coordenadas. En el instante inicial por la espira grande circula una corriente I_1= 20 A en sentido anti-horario y por la pequeña no circula corriente. En el instante t_0 la espira pequeña comienza a moverse con velocidad $\vec{v} = 10$ m/s $\hat{k}$. A) Determinar la fem inducida en t_0 sobre la espira pequeña y la dirección en la que circula la corriente inducida. Considerar que sobre la superficie de la espira pequeña el campo debido a la espira grande es aproximadamente constante sobre la sección. B) Si la espira chica tiene una resistencia de 1 Ω determinar la energía disipada en la misma durante 1 s ($\mu_0=4\pi x10^{-7}$ T/Am).

3) Un circuito *LC* serie está formado por una inductancia *L*= 1 mH y un capacitor de placas planas paralelas cuadradas de lado *a*= 20cm y separación *d*= 1 mm. El espacio entre placas está parcialmente ocupado por un aislante de ε_r=2 como muestra la figura (zona gris). A) Qué parte del espacio entre las placas está ocupado por el aislante si la frecuencia de resonancia del circuito es f_0=218.5 kHz. (ε_0= 8.85x10^{-12} F/m). B) Si el capacitor es reemplazado por una resistencia $R=|X_C|$, cuál es el factor de potencia del circuito?



4) (Sólo F II A / 82.02) En el interior de una pared de concreto (λ= 1 W/ (m K)) de espesor *d*=10 cm y área 10 m^2 se mide un gradiente de temperatura de módulo 100 K/m. A) Determinar la cantidad de calor transferida por unidad de tiempo y la temperatura interna si la externa es de 20ºC. B) El espesor de telgopor (λ=0.03 W/(m K)) que debe agregarse para que la cantidad de calor transferida se reduzca a la centésima parte. No tomar en cuenta efectos de convección ni radiación.

5) (Sólo F II A / 82.02) Un recipiente cilíndrico de largo *L*= 50 cm está cerrado con un pistón de radio *R*= 5 cm. El recipiente contiene aire y está en equilibrio con el entorno a presión atmosférica (100 kPa) y temperatura de 20ºC. Sobre el pistón se agrega lentamente 20 kg de arena al tiempo que se intercambia calor de forma que la temperatura permanece constante. A) Determinar el trabajo realizado. B) Repetir si ahora no hay calor intercambiado. *R*=8.31 J/K

4) (Sólo F II B) Un capacitor *C*= 1000 μF tiene una carga inicial Q_0= 0.1 C. Se conecta en paralelo sobre este capacitor una resistencia *R*= 1 kΩ. A) Calcular la carga del capacitor luego de 0.1 s. B) Calcular la energía disipada en la resistencia durante dicho intervalo de tiempo.

5) (Sólo F II B) La energía almacenada en una inductancia L_1= 1mH es de 2 mJ. Correspondientemente, para una inductancia L_2= 4 mH la energía almacenada es de 18 mJ. A) Las inductancias son acercadas hasta que el coeficiente de acoplamiento magnético es k= 0.5. Determinar la máxima y la mínima energía magnética almacenada en el conjunto. B) Ahora las inductancias son conectadas en serie, en configuración aditiva y con el mismo coeficiente de acoplamiento. Por las inductancias circula una corriente variable de forma tal que la caída de tensión sobre el conjunto vale $V(t) = 12\,\mathrm{V}\, e^{-t/1\mathrm{ms}}$. Calcular la corriente que circula si en t=0 la misma vale 4 A.

Tema 2. **Coloquio de Física II.** **26/2/2015**

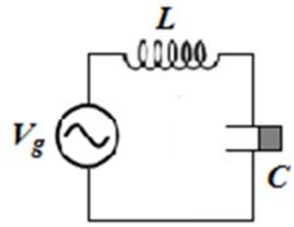
Nombre y Apellido: **Padrón:** **A B 82.02**

Correo electrónico: **Turno:** **Profesor:**

1) Un conductor muy largo yace sobre el eje *x* de una terna *xyz* estándar. El mismo transporta una corriente de 10 A en la dirección negativa de *x*. A) Cómo debe ubicarse otro conductor muy largo, por el que circula una corriente de 10 A, para que el campo $\vec{B}$ en el punto $\vec{P} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k}$ valga: $\vec{B} = \left(3\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k}\right)\mu\text{T}$. B) Una partícula de carga -1μC pasa por el punto P con velocidad $\vec{v} = 1000$ m/s $\hat{j}$; qué campo eléctrico debe existir para que la fuerza neta sobre la partícula se nula? (μ_0=4πx10^{-7} T/Am)

2) Dos espiras circulares concéntricas de radios R_1=20 cm y R_2= 2 mm yacen en el plano *xy* con sus centros en el origen de coordenadas. En el instante inicial por la espira grande circula una corriente I_1= 20 A en sentido horario y por la pequeña no circula corriente. En el instante t_0 la espira pequeña comienza a moverse con velocidad $\vec{v}$ = 20 m/s $\hat{k}$. A) Determinar la fem inducida en t_0 sobre la espira pequeña y la dirección en la que circula la corriente inducida. Considerar que sobre la superficie de la espira pequeña el campo debido a la espira grande es aproximadamente constante sobre la sección. B) Si la espira chica tiene una resistencia de 1 Ω determinar la energía disipada en la misma durante 1 s (μ_0=4πx10^{-7} T/Am).

3) Un circuito *LC* serie está formado por una inductancia *L*= 1 mH y un capacitor de placas planas paralelas cuadradas de lado *a*= 20cm y separación *d*= 1 mm. El espacio entre placas está parcialmente ocupado por un aislante de ε_r=2 como muestra la figura (zona gris). A) Qué parte del espacio entre las placas está ocupado por el aislante si la frecuencia de resonancia del circuito es f_0=218.5 kHz. (ε_0= 8.85x10^{-12} F/m). B) Si el capacitor es reemplazado por una resistencia $R=|X_C|$, cuál es el factor de potencia del circuito?



4) (Sólo F II A / 82.02) En el interior de una pared de concreto (λ=0.5 W/ (m K)) de espesor *d*=10 cm y área 20 m^2 se mide un gradiente de temperatura de módulo 50 K/m. A) Determinar la cantidad de calor transferida por unidad de tiempo y la temperatura interna si la externa es de 20ºC. B) El espesor de telgopor (λ=0.03 W/(m K)) que debe agregarse para que la cantidad de calor transferida se reduzca a la centésima parte. No tomar en cuenta efectos de convección ni radiación.

5) (Sólo F II A / 82.02) Un recipiente cilíndrico de largo *L*= 50 cm está cerrado con un pistón de radio *R*= 5 cm. El recipiente contiene aire y está en equilibrio con el entorno a presión atmosférica (100 kPa) y temperatura de 40ºC. Sobre el pistón se agrega lentamente 10 kg de arena al tiempo que se intercambia calor de forma que la temperatura permanece constante. A) Determinar el trabajo realizado. B) Repetir si ahora no hay calor intercambiado. *R*=8.31 J/K

4) (Sólo F II B) Un capacitor *C*= 2000 μF tiene una carga inicial Q_0= 0.2 C. Se conecta en paralelo sobre este capacitor una resistencia *R*= 1 kΩ. A) Calcular la carga del capacitor luego de 0.2 s. B) Calcular la energía disipada en la resistencia durante dicho intervalo de tiempo.

5) (Sólo F II B) La energía almacenada en una inductancia L_1= 1mH es de 8 mJ. Correspondientemente, para una inductancia L_2= 4 mH la energía almacenada es de 36 mJ. A) Las inductancias son acercadas hasta que el coeficiente de acoplamiento magnético es k= 0.5. Determinar la máxima y la mínima energía magnética almacenada en el conjunto. B) Ahora las inductancias son conectadas en serie, en configuración aditiva y con el mismo coeficiente de acoplamiento. Por las inductancias circula una corriente variable de forma tal que la caída de tensión sobre el conjunto vale $V\left(t\right)=12\,\mathrm{V}\,e^{-t/1\mathrm{ms}}$. Calcular la corriente que circula si en t=0 la misma vale 8 A.

26/2/2015

1) $\vec{B}(0,0,1) = (-3.10^{-6}, -10^{-6}, 0)\,T$

a) $\vec{B}_{hilo\,1}(0,0,1) = \left(0, -\frac{\mu_0 . 10A}{2\pi}, 0\right)T = (0, -2.10^{-6}, 0)\,T$

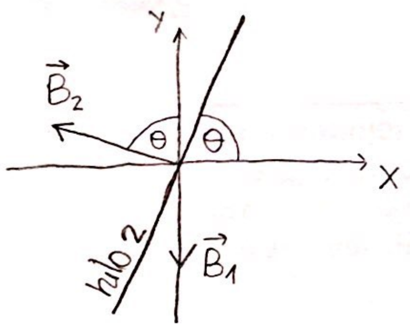
$\Rightarrow \vec{B}_{hilo\,2} = (-3.10^{-6}, -10^{-6}, 0) - \left(0, -\frac{\mu_0 . 10A}{2\pi}, 0\right)$

$\vec{B}_{hilo\,2} = (-3.10^{-6}, 10^{-6}, 0)\,T$

$\Rightarrow B_{hilo\,2} = \frac{\mu_0 . 10A}{2\pi\rho} = \sqrt{(-3.10^{-6})^2 + (10^{-6})^2} = 3,16.10^{-6}\,T$

$\Rightarrow \rho = 0,63$

$\Rightarrow$ el hilo 2 se ubica 0,63 por arriba o por debajo del hilo 1



$\theta = tg^{-1}\left(\frac{3.10^{-6}}{10^{-6}}\right) = 71,57°$

si se encuentra 0,63 por debajo la corriente irá para abajo y si se encuentra 0,63 por arriba irá para arriba la corriente

b) $q = 1.10^{-6}\,C$

$\vec{v} = 1000\,m/s\,\hat{j}$

$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0$

$\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B})$

$\vec{E} = -(1000\,m/s\,\hat{j} \times (-3.10^{-6}, -10^{-6}, 0)T)$

$\vec{E} = -3.10^{-3}\,\frac{N}{C}\,\hat{k}$

2) a) $R_1 = 0{,}2\,m$

$R_2 = 2\,10^{-3}\,m$

$i_1 = 20A$

$\vec{v}_2 = 10\,m/s\,\hat{k}$

$$\vec{B}_{espira\,1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$i = 20A$

$d\vec{l} = \rho\, d\varphi\,\hat{\varphi}$

$\vec{r} = (0,0,vt)$

$\vec{r}\,' = \rho\hat{\rho}$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{i\rho\, d\varphi\,\hat{\varphi}\times(-\rho\hat{\rho}+vt\,\hat{k})}{(\rho^2+(vt)^2)^{3/2}}$$

se considera solo el campo en $\hat{k}$ ya que R_2 es muy pequeño

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{i\rho^2 d\varphi\,\hat{k} + i\rho vt\, d\varphi\,\hat{\rho}}{(\rho^2+(vt)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i\rho}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\varphi\,\hat{k} + vt(\cos\varphi\,\hat{i}+\operatorname{sen}\varphi\,\hat{j})\,d\varphi}{(\rho^2+(vt)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i\rho}{4\pi(\rho^2+(vt)^2)^{3/2}}\left(vt\left(\cancel{(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{i})_0^{2\pi}} + \cancel{(-\cos\varphi)_0^{2\pi}}\right) + \rho 2\pi\,\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 i\rho}{4\pi(\rho^2+(vt)^2)^{3/2}}\cdot\rho 2\pi\,\hat{k} = \frac{\mu_0 i\rho^2 \cancel{2\pi}\,\hat{k}}{\cancel{4\pi}_{2}(\rho^2+(vt)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 .20A.0{,}2^2\,\hat{k}}{2(0{,}2^2+(10t)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{5{,}03.10^{-7}\,\hat{k}}{(0{,}04+100t^2)^{3/2}}\ T$$

$$\phi_{21} = \frac{5{,}03.10^{-7}}{(0{,}04+100t^2)^{3/2}}.\pi.(2.10^{-3}m)^2 = \frac{6{,}32.10^{-12}}{(0{,}04+100t^2)^{3/2}}\ Wb$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{6{,}32 \cdot 10^{-12}}{(0{,}04+100t^2)^{3/2}}\right)$$

$$= -6{,}32 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{d}{dt}\left((0{,}04+100t^2)^{-3/2}\right)$$

$$= -6{,}32 \cdot 10^{-12} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(0{,}04+100t^2)^{-5/2} \cdot 200t$$

$$= \frac{1{,}896 \cdot 10^{-9}\, t}{(0{,}04+100t^2)^{5/2}} \text{ V}$$

La corriente inducida irá en sentido antihorario. Esto lo sabemos por el signo de la fem inducida (que luego calculamos la corriente) y además se puede deducir ya que al alejarse, el flujo sobre la espira pequeña disminuye y ésta creará una corriente, que a su vez crea un campo, que se opone a este cambio de flujo, es decir, ayudándo al campo de la espira grande a que no disminuya. Entonces como el campo inducido es hacia arriba, la corriente circulará en sentido antihorario

$\boxed{b)}$ $R = 1\,\Omega$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \Rightarrow \int_{U(0)}^{U(1)} dU = \int_0^1 \frac{\mathcal{E}^2}{R}\,dt \Rightarrow \Delta U = \int_0^1 \frac{3{,}59 \cdot 10^{-18}\, t^2}{(0{,}04+100t^2)^5}\,dt$$

3) $L = 1.10^{-3}\,H$

$a = 0{,}2\,m, \quad A = 0{,}04\,m^2$

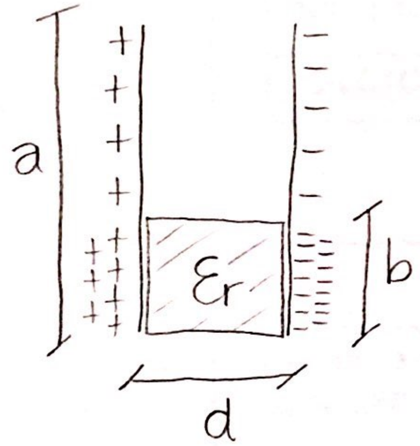
$d = 1.10^{-3}\,m$

$\varepsilon_r = 2$

$F_r = 218{,}5\,kHz = 218500\,Hz$

$$F_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow 218500\,Hz = \frac{1}{2\pi\sqrt{1.10^{-3}.C}}$$

$$\Rightarrow C = 5{,}31.10^{-10}\,F$$



$$q = \sigma_1\, a(a-b) + \sigma_2\, ab$$

$$\vec{D} = \begin{cases} \sigma_1 \hat{i}, & 0<x<d,\ b<y<a \\ \sigma_2 \hat{i}, & 0<x<d,\ 0<y<b \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \sigma_1/\varepsilon_0\, \hat{i}, & 0<x<d,\ b<y<a \\ \sigma_2/\varepsilon_0\varepsilon_r\, \hat{i}, & 0<x<d,\ 0<y<b \end{cases}$$

$\Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = -\int_0^d \vec{E}\, d\vec{l} = -E.d$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d = \frac{-\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} d$$

$$C = \frac{q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma_1\, a(a-b) + \sigma_2\, ab}{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} d} = \frac{\sigma_1\, a(a-b)}{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d} + \frac{\sigma_2\, ab}{\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} d}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a(a-b)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r a b}{d}$$

$$\Rightarrow 5{,}31 \cdot 10^{-10} F = \frac{\varepsilon_0 \cdot 0{,}2(0{,}2-b)}{10^{-3}} + \frac{\varepsilon_0 2 \cdot 0{,}2 b}{10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0{,}1\,m}$$

b) $R = |X_c| = \frac{1}{\omega C} = 1371{,}75\,\Omega$

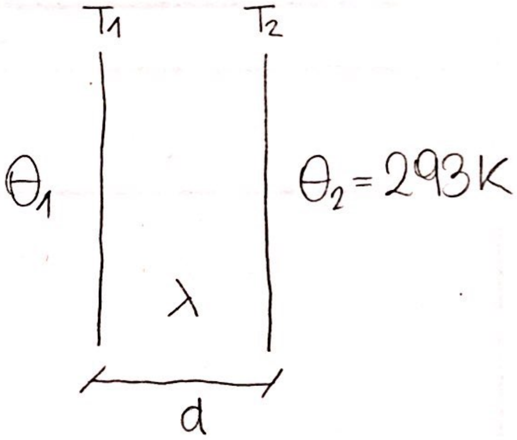
$$\boxed{\text{Factor de potencia} = \cos\varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = 0{,}71}$$

4) $\lambda = 1\,W/mK$

a) $d = 0{,}1\,m$

$A = 10\,m^2$

$|\vec{\nabla} T| = 100\,K/m$



$$\vec{\nabla} T = \frac{T_2 - T_1}{d} = \frac{293 - T_1}{0{,}1}$$

$$\frac{\dot{Q}}{S} = -K\vec{\nabla} T$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda(T_1 - T_2)A}{d}$$

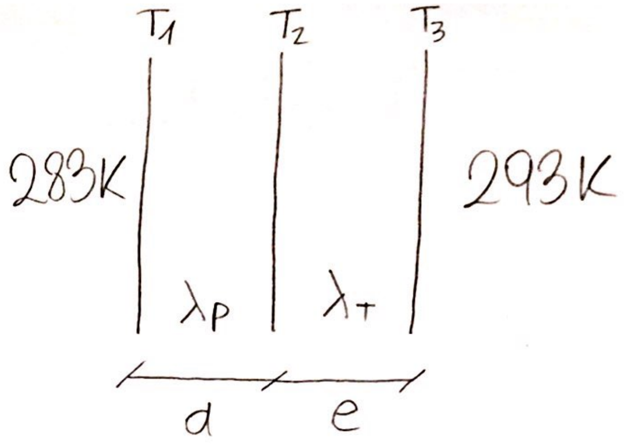
$$100 = \frac{293 - T_1}{0{,}1} \qquad -100 = \frac{293 - T_1}{0{,}1}$$

$$\boxed{T_1 = 283\,K} \qquad T_1 = 303\,K$$

$$\boxed{\dot{Q} = -1000\,W}$$

b) $\lambda_T = 0{,}03\ W/mK$

$\dot{Q} = -10W$



$$\dot{Q} = \frac{\lambda_P S (T_1 - T_2)}{d}$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_T S (T_2 - T_3)}{e}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}\left(\frac{d}{\lambda_P S} + \frac{e}{\lambda_T S}\right) = T_1 - T_3$$

$$-10W\left(\frac{0{,}1m}{1 W/mK \cdot 10m^2} + \frac{e}{0{,}03 W/mK \cdot 10m^2}\right) = 283K - 293K$$

$$\Rightarrow \boxed{e = 0{,}297m}$$

5) $L = 0{,}5m$ se agregan lentamente 20kg

$R = 0{,}05m$

$P = 100kPa = 1atm$

$T = 293K$

$P_1 = 1atm$ $\Rightarrow n = 0{,}16\ mol$

$T_1 = 293K$

$V_1 = \pi (0{,}05)^2 \cdot 0{,}5 = 3{,}93 \cdot 10^{-3} m^3$

$= 3{,}93\ l$

$P_2 = 1atm + 200N / \pi \cdot 0{,}05^2$

$\Rightarrow P_2 = 1atm + 0{,}251\ atm = 1{,}251\ atm$

$T_2 = 293K$ $V_2 = \frac{T_2 n R}{P_2} = 3{,}07\ l$

a) $W = \int \frac{nRT}{V} dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

$= 0,16 \cdot 0,082 \cdot 293 \cdot \ln\left(\frac{3,07}{3,93}\right) = -0,95 \text{ atm.l}$

$= \boxed{-96,27 \text{ J}}$

b) $W = -nC_V \Delta T$

$P_1 = 1 \text{atm} \quad T_1 = 293 K \quad V_1 = 3,93 \text{ l} \quad n = 0,16 \text{ mol}$

$P_2 = 1,251 \text{ atm}$

$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \rightarrow 1 \text{atm} \cdot (3,93 \text{l})^{7/5} = 1,251 \text{ atm} \cdot V_2^{7/5}$

$V_2 = 3,35 \text{ l}$

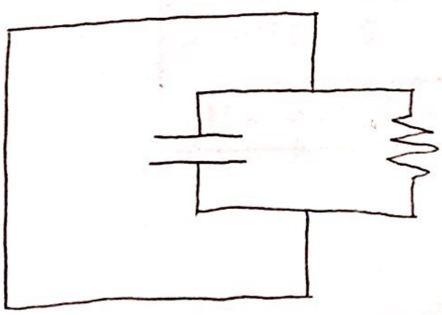
$\Rightarrow T_2 = 319,42 K$

$\boxed{W = -0,16 \cdot \frac{5}{2} 8,31 \cdot (319,42 - 293) = -87,82 \text{ J}}$

$\boxed{4)}$ $C = 1 \cdot 10^{-3} F$

$Q_0 = 0,1 C$

$R = 1000 \Omega$



$R \cdot i(t) = -\frac{q(t)}{C}$

$i = -\frac{dq}{dt}$

$0 = \frac{q(t)}{C} + R \frac{dq(t)}{dt}$

$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$

$q_p(t) \rightarrow 0 = \frac{q_p(t)}{C} \Rightarrow q_p(t) = 0$

$q_h(t) \rightarrow 0 = \frac{q_h(t)}{C} + R \frac{dq_h(t)}{dt}$

$$-\frac{q_h(t)}{C} = R\frac{dq_h(t)}{dt}$$

$$\int -\frac{dt}{RC} = \int \frac{dq_h(t)}{q_h(t)}$$

$$K - \frac{t}{RC} = \ln(q_h(t)) \rightarrow e^{K} \cdot e^{-t/RC} = q_h(t)$$

$$\Rightarrow q(t) = Ke^{-t/RC}$$

como $q(0) = 0{,}1C \Rightarrow 0{,}1 = Ke^{0} \Rightarrow K = 0{,}1$

$$\Rightarrow q(t) = 0{,}1e^{-t/RC}$$

$$q(0{,}1s) = 0{,}1 . e^{-0{,}1/(1000\Omega . 10^{-3}F)}$$

$$\cancel{= 0{,}11C} \quad = 0{,}09C$$

5) $L_1 = 10^{-3} H$ $\qquad K = 0{,}5$

a) $U_1 = 2.10^{-3} J$ $\qquad M = 0{,}5\sqrt{L_1 L_2}$

$L_2 = 4.10^{-3} H$ $\qquad M = 10^{-3} H$

$U_2 = 18.10^{-3} J$

$$U_1 = \frac{1}{2} i_1^2 L_1 \rightarrow 2.10^{-3} = \frac{1}{2} 10^{-3} i_1^2 \rightarrow i_1 = 2A$$

$$U_2 = \frac{1}{2} i_2^2 L_2 \rightarrow 18.10^{-3} = \frac{1}{2} . 4.10^{-3} i_2^2 \rightarrow i_2 = 3A$$

$$\boxed{U_T = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = 0{,}026 J \rightarrow MAX}$$

$$\boxed{U_T = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = 0{,}02 J \rightarrow MIN}$$

b) $L_1 = 10^{-3} H$

$L_2 = 4.10^{-3} H$ $\qquad L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$

$M = 10^{-3} H$ $\qquad V(t) = V_L = L_{eq} \frac{di(t)}{dt}$

$$12V e^{-t/10^{-3}s} = (10^{-3} + 4.10^{-3} + 2.10^{-3}) \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow 1714{,}29 e^{-t/10^{-3}} = \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \int 1714{,}29 e^{-t/10^{-3}} dt = \int di(t)$$

$$\Rightarrow -10^{-3} . 1714{,}29 e^{-t/10^{-3}} + K = i(t)$$

$$i(t) = -1{,}71 e^{t/10^{-3}} + K$$

$$i(0) = 4A = -1{,}71 + K \rightarrow K = 5{,}71\,A$$

$$\Rightarrow \left[i(t) = -1{,}71\,A\,e^{t/10^{-3}s} + 5{,}71\,A \right]$$